

Descomposición espacio-temporal del EEG con el uso de un modelo GARCH

Yanays Rodríguez Puentes y Eduardo Martínez Montes

Departamento de Neurofísica, Centro de Neurociencias de Cuba., Ave. 25, No.15202, Esq. 158, Cubanacán, Playa., CP. 11400, Ciudad de La Habana, Cuba.

Recibido: 30 de octubre del 2004

Aceptado: 4 de diciembre del 2004

Palabras clave: EEG, GARCH, descomposición espacio temporal.

Key words: EEG, GARCH, spatio - temporal decomposition.

RESUMEN. Actualmente, ninguna técnica para el estudio del cerebro ofrece información de alta resolución espacial y temporal simultáneamente. Por esto, la fusión del EEG (Electroencephalography) de alta resolución temporal y la fMRI (functional Magnetic Resonance Imaging) con magnífica resolución espacial, es un resultado científico relevante. Dada la disparidad en las escalas temporales de ambas técnicas, resulta conveniente resumir la enorme cantidad de datos del EEG y relacionar sólo la información relevante con los de fMRI. En nuestro trabajo se propone un novedoso método de descomposición espacio-temporal del EEG, usando un modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity) para el factor temporal. Este considera la volatilidad de las series de tiempo, correspondiente con la modulación observada en el EEG. El modelo se validó con datos simulados y reales. El algoritmo parece captar la modulación del EEG que se fusionaría con datos de fMRI, sin embargo el costo computacional debe reducirse para facilitar su uso clínico y científico.

ABSTRACT. Nowadays, there is no technique, for the study of the human brain, providing simultaneously the required high spatial and temporal resolution. Therefore, the fusion of the EEG (Electroencephalography) with high temporal resolution and fMRI (functional Magnetic Resonance Imaging) with high spatial resolution constitutes a relevant scientific achievement. The mismatch in the temporal scales of both techniques suggests summarizing the huge amount of EEG data, relating the relevant information with the fMRI. Here, we proposed a novel method for the EEG spatio-temporal decomposition, using a GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity) model for the temporal factor. This model considers the time series volatility, which corresponds to the observed EEG modulation. The method was assessed with synthetic and real data. The algorithm seems to capture the EEG modulation to be related with the fMRI data. However, reducing the computational cost is needed for major scientific and clinical applications.

INTRODUCCIÓN

El estudio y tratamiento de las enfermedades que afectan al sistema nervioso ha constituido siempre un tema de vital importancia. Actualmente, se cuenta con diversas técnicas que permiten comprender mejor el funcionamiento del cerebro. Un grupo muy representativo lo constituyen las Neuroimágenes, que ofrecen una imagen de actividad funcional con un excelente contraste y poder de resolución espacial. Ejemplo de estas técnicas son: PET (*Positron Emission Tomography*), SPECT (*Single Photon Emission Computer Tomography*) y fMRI (*functional Magnetic Resonance Imaging*), las cuales ofrecen imágenes tomográficas que reflejan principalmente características del flujo sanguíneo. Pero a pesar de que estas técnicas poseen una resolución espacial del orden de los milímetros, presentan una baja resolución temporal (~s) debido a la lentitud con que ocurren los procesos hemodinámicos. Además estas técnicas suelen ser invasivas para el paciente y el costo de su montaje y utilización es elevado.

Existen otras técnicas como el EEG (Electroencefalograma) y MEG (Magnetoencefalograma), que permiten registrar la actividad eléctrica y magnética del cerebro con una gran resolución temporal (~mseg). Estas no son invasivas ni muy costosas. Además, a diferencia de las neuroimágenes, poseen una baja resolución espacial (~cm) ya que la señal es medida sobre el cuero cabelludo y refleja la actividad sincronizada (tanto espacial como temporalmente), de grandes poblaciones de neuronas. Por otra parte, el potencial generado por las zonas alejadas de la corteza sufre una distorsión considerable, y pudiera no ser detectado si la fuente es lo suficientemente débil, dado que el campo eléctrico disminuye proporcionalmente al cuadrado de la distancia a la fuente.

No es difícil percatarse de que ninguna de las técnicas con que se cuenta hasta el momento es capaz de captar al unísono información temporal y espacial de una resolución adecuada. Por esta razón, actualmente los neurocientíficos se han dado a la tarea de combinar la información obtenida a través de varias de ellas, con el fin de mejorar las propiedades de las técnicas por separado.

De esta forma, al integrar una imagen de actividad funcional y un registro temporal de actividad eléctrica, sería posible lograr una nueva modalidad que contara a la vez con información temporal y espacial de buena resolución.

La fusión de la magnífica resolución temporal del EEG o del MEG, con el excelente contraste y poder de resolución espacial de la fMRI es particularmente atractiva. Se han reportado varios métodos de integración¹ abordados desde diferentes puntos de vista. Varios grupos^{2,3} han intentado analizar los datos de EEG y fMRI, registrados separadamente, otros han desarrollado métodos para la recolección al unisono⁴ e incluso se ha tratado de buscar una mejor explicación a la relación espacio-temporal entre el fMRI y las componentes oscilatorias del EEG sin establecer una hipótesis a priori.⁵

Quizás, la mayor dificultad para la fusión de datos de EEG y fMRI consiste en la diferencia en sus escalas temporales. Esto ha llevado a que en la actualidad, se tienda a utilizar métodos para resumir la enorme cantidad de datos que provee el EEG y relacionar sólo la información relevante con los datos de fMRI, lo cual proveería de una mejor interpretabilidad de los resultados desde el punto de vista fisiológico. Las formas de resumir la información del EEG son varias, desde variantes directas que involucran promediación o filtraje, pasando por los métodos clásicos de análisis en el dominio de la frecuencia, hasta métodos sofisticados de descomposición espacio-tiempo-frecuencia del EEG. Estos últimos constituyen uno de los enfoques más populares.

Trabajos previos se han limitado a sólo dos de estas componentes. Tal es el caso del Análisis de Componentes Principales (ACP)⁶ y el Análisis de Componentes Independientes (ACI)⁷, que se han empleado para lograr una descomposición espacio-temporal del EEG, obtenida bajo la imposición de condiciones de ortogonalidad (ACP) o independencia estadística (ACI) de las componentes. Estas restricciones matemáticas, aunque acertadamente usadas en muchos problemas reales, carecen de interpretación y sustento desde el punto de vista fisiológico. El ACP sufre además de una inherente falta de unicidad, también conocida como libertad rotacional, que permite la elección arbitraria de los ejes de rotación (ej: rotación Varimax, de máxima varianza. La información sobre la frecuencia en estos métodos, puede ser estimada en un paso posterior a partir del comportamiento temporal obtenido para las componentes extraídas.

Se han desarrollado también muchos métodos de descomposición en tiempo-frecuencia para un solo canal o electrodo. Ejemplo de esto es la implementación de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) con ventanas deslizantes⁸. De hecho, cualquiera de las descomposiciones en tiempo-frecuencia disponibles hasta el momento (Ondelets o *wavelets*,⁹ MDC¹⁰) puede ser usada para el EEG, pero ignoran los aspectos espaciales del mismo. La descomposición del EEG en espacio-frecuencia-tiempo fue introducida por König en el 2001¹¹ y este fue el primer trabajo para estimar diferentes componentes caracterizadas simultáneamente por frecuencia, tiempo y distribución espacial. En su trabajo era posible extraer actividad fisiológicamente significativa del EEG. Sin embargo, para

obtener una solución única era necesario exigir que la combinación frecuencia-tiempo de todas las componentes cumpliera la condición de mínima norma y que las características espaciales o topográficas tuvieran máxima suavidad.

Recientemente, se ha utilizado un método de descomposición que permite igualmente obtener componentes de espacio-tiempo-frecuencia del EEG, basado en el análisis de este como datos multidimensionales. En este caso la solución de la descomposición es única bajo condiciones poco exigentes. La disposición de los datos de EEG en un arreglo tridimensional cuyas dimensiones corresponden a espacio (electrodos), frecuencia y tiempo permite la aplicación de una descomposición única que se conoce como PARAFAC (*Parallel Factor Analysis*).¹² Este modelo asume que el EEG es la suma de componentes que dependen linealmente tanto del espacio, como del tiempo y la frecuencia. Aunque este método tiene ventajas como la unicidad de la descomposición y la mayor interpretabilidad de los resultados, la suposición de una dependencia trilineal con los datos en ocasiones puede que no sea correcta y por tanto los resultados pueden carecer de sentido físico. Además, el número de componentes a estimar puede ser escogido arbitrariamente y su escala y signo están indeterminados, lo cual exige generalmente un pre y postprocesamiento de los datos.

En nuestro trabajo se propone un modelo de descomposición espacio-temporal del EEG, con el empleo de un modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity)¹³ para el factor temporal. Este considera la evolución temporal de las varianzas (volatilidad) de las series de tiempo, en correspondencia con la modulación observada en series reales de EEG. Asimismo, como el espectro de la serie temporal es proporcional a su varianza,¹⁴ la volatilidad nos informa sobre la evolución espectral de los datos considerados. Esta metodología tiene la ventaja de basarse en suposiciones sustentadas desde el punto de vista fisiológico, a la vez que brinda información relevante y útil para la fusión con datos de fMRI, en vistas a mejorar la resolución temporal de la misma.

MÉTODOS

Planteamiento del modelo

La diferencia de potencial eléctrico medido en el EEG se puede disponer en un arreglo bidimensional, de forma que el EEG puede ser representado por la matriz \mathbf{V} cuyas filas son las series de tiempo correspondientes a cada electrodo en el cuero cabelludo. De esta forma, la primera dimensión representa la distribución espacial de los voltajes, lo que se conoce indistintamente como topografías, y la segunda es la evolución temporal o curso del tiempo del EEG. La descomposición de estos datos consiste en obtener un número pequeño (Nk) de distribuciones espaciales características (o topografías) y cursos de tiempo correspondientes, que puedan asociarse a los ritmos cerebrales o actividades fisiológicas conocidas.

Matemáticamente, la descomposición se plantea en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{V}_{Ne \times Nt} = \mathbf{A}_{Ne \times Nk} \mathbf{G}_{Nk \times Nt} + \mathbf{E}_{Ne \times Nt} \quad (1)$$

donde \mathbf{A} es la matriz cuyas columnas son las topografías características y \mathbf{G} contiene en sus filas las series de tiempo o evolución temporal de las mismas. Ne es el número de electrodos, Nt el número de instantes de tiempo en que se tomó la medición y \mathbf{E} el error instrumental y ambiental. En nuestro caso se asume este como ruido blanco, es decir, como una variable aleatoria cuyas columnas distribuyen $N_{Ne}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$, donde $\mathbf{R} = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{Ne}$. Esta suposición es bastante acertada bajo las condiciones experimentales usuales en el EEG, donde las fuentes de

ruido externas son lejanas y la distancia entre los electrodos es mucho mayor que las dimensiones de los mismos. Esto implica asumir que el ruido experimental es independiente en cada electrodo y en cada instante de tiempo.

Esta descomposición no está determinada unívocamente pues cualquier rotación de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{G} satisface la ecuación (1). Sin embargo, podemos hacer suposiciones adicionales sobre el comportamiento temporal de la actividad eléctrica, lo que se conoce también como introducción de información a priori sobre la dinámica del EEG. El uso de información a priori sobre los datos e independiente de estos, nos permite hallar una descomposición única. El modelo dinámico propuesto en este caso para los cursos de tiempo (o factores temporales) de las componentes tiene la forma:

$$\mathbf{g}_t = \begin{pmatrix} g_{1,t} \\ g_{2,t} \\ \vdots \\ g_{Nk,t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} g_{1,t} = a g_{1,t-1} + \sigma_{1,t-1} \varepsilon_{1,t} \\ g_{2,t} = 2\gamma_2 (\cos \omega_2) g_{2,t-1} - \gamma_2^2 g_{2,t-2} + \sigma_{2,t-1} \varepsilon_{2,t} \\ \vdots \\ g_{Nk,t} = 2\gamma_{Nk} (\cos \omega_{Nk}) g_{Nk,t-1} - \gamma_{Nk}^2 g_{Nk,t-2} + \sigma_{Nk,t-1} \varepsilon_{Nk,t} \end{cases} \quad (2)$$

donde $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t}, \dots, \varepsilon_{Nk,t})^T$ distribuye según una distribución Multinormal $N_{Nk}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{Nk})$. Las magnitudes $a, \gamma_k, \omega_k, (k = 2..Nk)$, constituyen parámetros del modelo. Es importante notar que las Nk componentes no siguen un mismo modelo dinámico. El primer elemento de \mathbf{g}_t corresponde a la actividad de fondo, conocida como actividad ξ (X_i), y se propone que siga un modelo autorregresivo de primer orden ya que no tiene un comportamiento oscilatorio, sino más bien su espectro corresponde con una función tipo t-student centrado en 0

Hz y que contiene energía en todas las bandas de frecuencia.¹⁵ El comportamiento rítmico, típico de las otras actividades encontradas en el EEG espontáneo, se obtiene con un modelo autorregresivo de segundo orden, el cual se propone para el resto de las componentes. Por otro lado, en este modelo se propone que las varianzas de las componentes varíen en el tiempo, tomando en cuenta la modulación del ritmo. Esto permite la estimación de la evolución temporal lenta de los espectros de los cursos de tiempo, la cual puede ser relacionada posteriormente con las series de tiempo de fMRI. Para las varianzas se propone entonces las ecuaciones deterministas:

$$\begin{cases} \sigma_{1,t}^2 = c_1 + b_1 \sigma_{1,t-1}^2 + d_1 v_{1,t-1}^2 \\ \sigma_{2,t}^2 = c_2 + b_2 \sigma_{2,t-1}^2 + d_2 v_{2,t-1}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{Nk,t}^2 = c_{Nk} + b_{Nk} \sigma_{Nk,t-1}^2 + d_{Nk} v_{Nk,t-1}^2 \end{cases} \quad (3)$$

El vector $\mathbf{v}_{t(Nk \times 1)} = (v_{1,t}, v_{2,t}, \dots, v_{Nk,t})^T$ representa el error de predicción de los factores temporales (cursos de tiempo) correspondientes y también se le conoce como innovación del estado. Las ecuaciones (2) y (3) representan un modelo GARCH. Para asegurar que el modelo está bien definido y las varianzas sean no negativas es necesario que los parámetros b_k, d_k sean no negativos y los parámetros c_k sean positivos para $(k = 1..Nk)$. Por otro lado, los coeficientes autorregresivos de la ecuación (2), deben ser menores que la unidad para garantizar la estabilidad del modelo.

Con este modelo se toma en cuenta la diferencia entre el

comportamiento dinámico de la actividad de fondo y el resto de las actividades rítmicas típicas del EEG. Además, el hecho de tener en cuenta explícitamente tanto el ruido experimental como el ruido fisiológico, nos acerca más al sistema real, en el que los procesos cerebrales subyacentes al EEG están sujetos a pequeñas perturbaciones dadas por la gran interconectividad de las neuronas y las diferentes estructuras involucradas en la generación de los ritmos cerebrales. Por último, vale destacar que, a pesar de ser este un modelo de descomposición espacio-temporal, no es necesario obtener la información sobre la frecuencia en un paso adicional, lo cual constituye una ventaja sobre los métodos de descomposición tridimensional.

Estimación de los parámetros del modelo

El interés fundamental consiste en la estimación de los factores espacial (Λ) y temporal (G) de la ecuación (1) y de la evolución temporal de las varianzas de este último ($\sigma_{k,t}^2, k = 1..Nk$). En segundo término, es importante la

estimación de algunos de los parámetros del modelo, los cuáles caracterizan al mismo y a veces no se tiene información a priori sobre los posibles valores que pudieran tomar. A partir de la expresión (2) podemos establecer el vector de estado y la matriz de transición como:

$$x_{t(2Nk-1 \times 1)} = \begin{pmatrix} g_{1,t} \\ \vdots \\ g_{Nk,t} \\ g_{2,t-1} \\ \vdots \\ g_{Nk,t-1} \end{pmatrix}, \Phi_{(2Nk-1 \times 2Nk-1)} = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\gamma_2 \cos \omega_2 & \dots & 0 & -\gamma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2\gamma_{Nk} \cos \omega_{Nk} & 0 & \dots & -\gamma_{Nk}^2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

y describir todo el problema como un Modelo de Espacio de Estado:¹⁶

$$\begin{cases} v_{t(Ne \times 1)} = M_{(Ne \times 2Nk-1)} x_{t(2Nk-1 \times 1)} + e_{t(Ne \times 1)}, & e_t \sim N_{N_e}(0, R) & \text{Ec. Observación} \\ x_{t(2Nk-1 \times 1)} = \Phi_{(2Nk-1 \times 2Nk-1)} x_{t-1(2Nk-1 \times 1)} + \bar{e}_{t(2Nk-1 \times 1)}, & \bar{e}_t \sim N_{2Nk-1}(0, Q_t) & \text{Ec. Estado} \end{cases}$$

donde la matriz que relaciona el vector de estado con las observaciones toma la forma

y covarianza del ruido experimental sería $R = \sigma_e^2 I_{N_e}$ y la del ruido fisiológico (variante en el tiempo):

$$M_{(Ne \times 2Nk-1)} = [\Lambda_{(Ne \times Nk)} \quad 0_{(Ne \times Nk-1)}], \text{ la matriz de varianzas}$$

$$Q_{t(2Nk-1 \times 2Nk-1)} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 & 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & \sigma_{2,t}^2 & \dots & 0 & & & 0_{(Nk \times Nk-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{Nk,t}^2 & & & \\ & 0_{(Nk-1 \times Nk)} & & & & & 0_{(Nk-1 \times Nk-1)} \end{bmatrix}$$

Para que el modelo sea identificable, las matrices Φ y M deben satisfacer la condición de observabilidad. Esta consiste en que la matriz $[M^T (M\Phi)^T \dots (M\Phi^{N_t-1})^T]^T$ sea de rango completo por las filas. Igualmente las condiciones de estacionaridad y estabilidad se verifican si y solo si los autovalores de la matriz Φ son menores que la unidad. Así planteado el modelo, los elementos de la matriz G pueden ser estimados dentro del vector de estado x_t con el uso del Filtro Kalman,¹⁷ con la modificación de actualizar las varianzas según (3). El error de predicción v_t es actualizado dentro del procedimiento como la diferencia entre el estado estimado en cada instante de tiempo, dada la información hasta el instante t y aquel estimado dada la información hasta $t-1$. Los parámetros $a, b_k, c_k, d_k, (k = 1..Nk)$ y el valor inicial x_0 del vector de estado se estimaron maximizando el logaritmo del valor de la función de verosimilitud ($\log L$) del modelo, (ver Apéndice). Para esto último se utilizó el método multidimensional de minimización no lineal de Nelder-Mead,¹⁸ el cual minimiza una función escalar de un vector de parámetros con los cuales no tiene una dependencia

lineal, sin tener en cuenta información sobre sus derivadas. Por otro lado, se utilizaron valores fijos ad hoc para γ_k y $\omega_k, (k = 2..Nk)$, ya que estos caracterizan la frecuencia de los ritmos modelados. En el caso del EEG espontáneo, los ritmos predominantes son alfa, theta y beta. El valor de σ_e^2 se toma de acuerdo a una relación señal ruido típica del EEG.

Para obtener las topografías características utilizamos simplemente una regresión que se obtiene directamente de la vectorización de la ecuación (1), dada la matriz G estimada anteriormente:

$$V^v = (G^T \otimes I_{N_e}) \Lambda^v + E^v$$

Todas las magnitudes de interés se obtienen dentro de un algoritmo iterativo que consta de dos pasos fundamentales. En el primero se estiman iterativamente la dinámica (G) por Filtro Kalman y los parámetros con el método de optimización no lineal. En el segundo punto se utilizan los valores obtenidos en el primero, para calcular las topografías. Estos dos pasos se repiten hasta obtener la convergencia de la función de verosimilitud del modelo, hallada dentro del procedimiento del Filtro Kalman.

La convergencia tanto de la verosimilitud como de los parámetros se validó al cumplirse la condición de que la distancia relativa del valor de los parámetros entre dos iteraciones sucesivas, fuera menor que una tolerancia especificada.

RESULTADOS

Simulación

Utilizando las ecuaciones (2) y (3), se simuló un dato de EEG para $N_e = 32$ electrodos, $N_t = 500$ instantes de tiempo y $N_k = 3$ componentes. El período de muestreo se escogió de 5 ms. Los valores de \mathbf{M} y Φ usados en la simulación se escogieron de forma que satisficieran las condiciones de estabilidad y observabilidad del modelo. En la simulación de la componente temporal se usaron los parámetros

$$a = 0,75, \quad \gamma_2 = 0,99, \quad \gamma_3 = 0,95, \quad \omega_2 = 2\pi(10 \text{ Hz}) \quad \text{y}$$

$$\omega_3 = 2\pi(4 \text{ Hz}). \quad \text{El valor de } \sigma_e \text{ se escogió de forma que la}$$

relación señal-ruido ($SNR = \frac{\text{sup}(\mathbf{V})}{\sigma_e}$) fuera igual a 1000.

La utilización de un bajo nivel de ruido, como primera aproximación al estudio del modelo, nos permite validar mejor la dependencia intrínseca del mismo respecto a los parámetros a estimar y los fijados ad hoc. El valor inicial del vector de estado \mathbf{x}_0 fue el vector nulo y las varianzas iniciales fueron $\sigma_{k,0} = 0.1, k = 1..3$. Los valores iniciales de c_k y $d_k, k = 1..3$ se muestrearon de una distribución Uniforme en el intervalo real $[0,0.1]$ en cada caso, evidenciando la falta de conocimiento a priori sobre sus posibles valores. Las varianzas de los factores temporales se simularon como funciones explícitas del tiempo, ($t = 1..500$). La varianza de la primera componente, (correspondiente a una actividad de fondo lenta), se modeló como una función coseno de baja frecuencia, de forma que reflejara la presencia de una modulación de esta actividad. Mientras que las otras dos se tomaron como funciones de paso para simular su aparición y desaparición en momentos determinados (Fig.1).

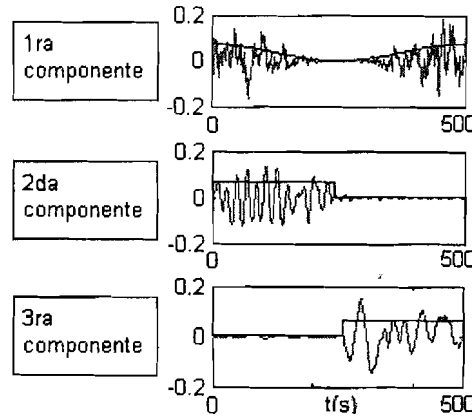


Fig.1. Factor temporal simulado (trazo claro) con sus respectivas varianzas (trazo oscuro).

Las topografías se simularon como diferentes patrones gaussianos normalizados con centro en los electrodos 5, 15

y 25 respectivamente y diferentes desviaciones estándar, de manera que las tres topografías fueran ortogonales entre sí (Figura 2a).

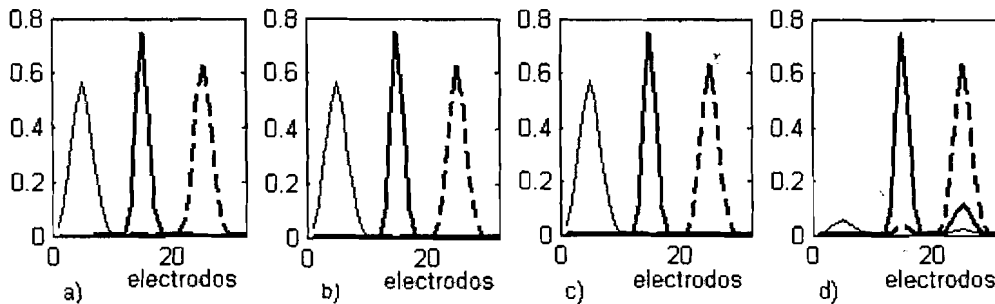


Fig. 2. Topografías características para las tres componentes (1ra componente: trazo continuo fino, 2da componente: trazo continuo grueso, 3ra componente: trazo discontinuo): a) simuladas, b) Λ_0 igual a topografías simuladas, c) Λ_0 igual a las tres primeras CP de los datos, d) Λ_0 igual a la media de los datos.

Finalmente, para resolver la indeterminación en escala de los factores espacial y temporal, se asumió que el segundo tenía norma unitaria, mientras el primero recoge la escala de los datos. En datos sintéticos, esto no tiene gran relevancia, por lo que para lograr una mejor comparación visual entre los datos estimados y simulados, se graficarán todas las topografías post-normalizadas. El convenio para determinar el signo de los factores fue que las topografías características fueran positivas, o al menos que el pico de las gaussianas esté orientado hacia el lado positivo.

Estimación del modelo usando diferentes valores iniciales para las topografías

El hecho de que en el paso de estimación de la dinámica y demás parámetros, las topografías no varían, sugiere que

valores irracionales de estas provoquen una estimación errónea de la dinámica del sistema, por lo cual la dependencia del algoritmo de los valores iniciales de las topografías cobra gran interés. Por esto, se realizó la estimación del modelo simulado utilizando tres tipos de valores iniciales para el factor espacial: i) las mismas topografías simuladas (patrón de comparación), ii) las tres primeras componentes principales (CP) de los datos, iii) la media de los datos en cada componente. Los valores iniciales de los demás parámetros se tomaron como se indicó en la sección anterior. En la Fig.2 aparecen las topografías estimadas en los tres casos y las topografías simuladas como patrón de comparación. El comportamiento temporal para las componentes del EEG y sus respectivas varianzas, aparecen en la Figura 3.

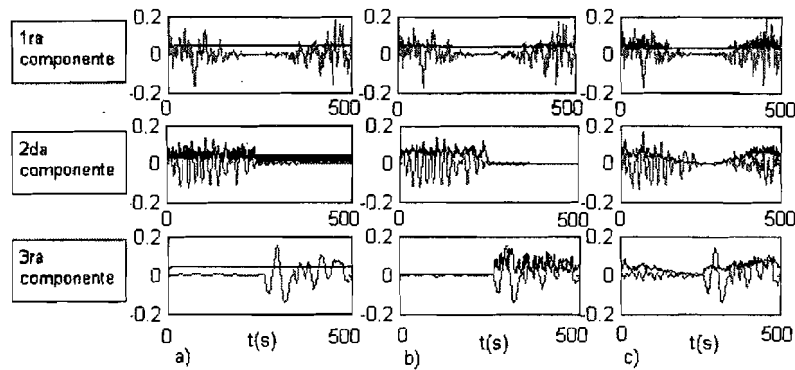


Fig. 3. Factor temporal (trazo claro) para las componentes estimadas y sus respectivas varianzas (trazo oscuro): a) Λ_0 igual a las topografías simuladas, b) Λ_0 igual a las tres primeras CP de los datos, c) Λ_0 igual a la media de los datos.

Estimación del modelo usando diferentes valores iniciales para el vector de estado.

El estudio de la influencia del valor inicial del vector de estado es también de sumo interés. Usando las tres primeras CP de los datos como topografías iniciales, se probaron tres valores de x_0 : i) vector nulo (este resultado ya se vio en la sección anterior), ii) $x_0 \sim N(0, I_{2Nk-1})$, iii) $x_0 \sim N(0, \Sigma)$,

con $\Sigma^v = (I_{(2Nk-1)^2} - (\Phi_0 \otimes \Phi_0))^{-1} Q_0^v$, lo cual se obtiene al considerar que la varianza del vector de estado en la condición inicial permanece constante, y hallarla a partir de la Ecuación de Estado. La Fig. 4 muestra las topografías simuladas y estimadas para los x_0 iniciales. El correspondiente comportamiento temporal y sus respectivas varianzas para cada componente, aparecen en la Fig. 5.

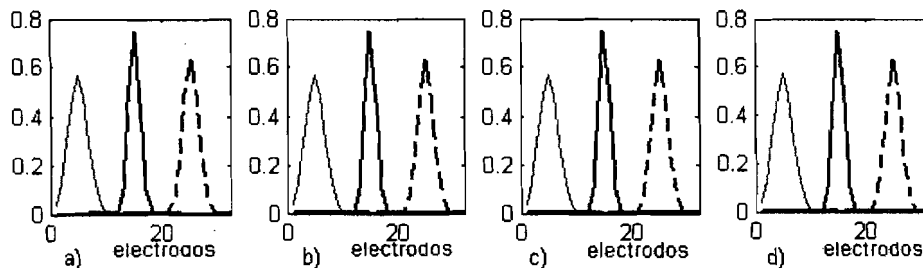


Fig. 4. Topografías características para las tres componentes (1ra componente: trazo continuo fino, 2da componente: trazo continuo grueso, 3ra componente: trazo discontinuo): a) simuladas, b) estimadas con x_0 como vector nulo, c) con $x_0 \sim N(0, I_{2Nk-1})$, d) con $x_0 \sim N(0, \Sigma)$, donde $\Sigma^v = (I_{(2Nk-1)^2} - \Phi_0 \otimes \Phi_0)^{-1} Q_0^v$.

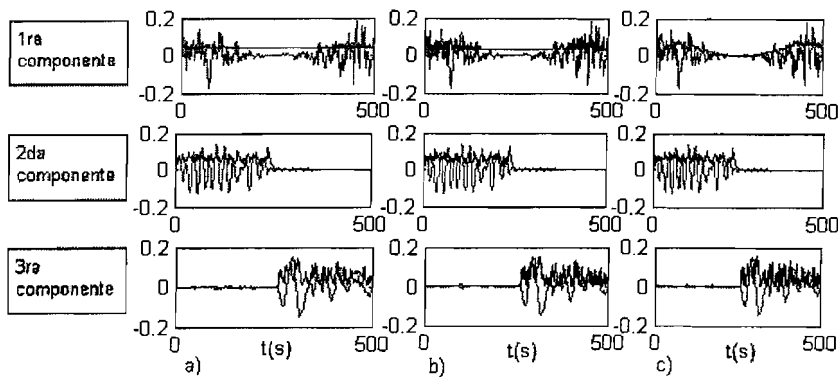


Fig. 5. Factor temporal (trazo claro) para las componentes estimadas y sus respectivas varianzas (trazo oscuro): a) estimadas con \mathbf{x}_0 como vector nulo, b) con $\mathbf{x}_0 \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{2Nk-1})$, c) con $\mathbf{x}_0 \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$, donde $\Sigma^v = (\mathbf{I}_{(2Nk-1)^2} - \Phi_0 \otimes \Phi_0)^{-1} \mathbf{Q}_0^v$.

Datos reales

Para la validación del modelo en datos reales se analizó un segmento de dos segundos de EEG real., que no pudo ser mayor debido al costo computacional del algoritmo). Estos datos corresponden a un registro con 61 electrodos a un sujeto normal, (período de muestreo de 4 ms), bajo la condición experimental de reposo con ojos cerrados (cortesía del Dr. Thomas König). Se desecharon los electrodos 20 y 60 por presentar artefactos. El segmento consta de 500 instantes de tiempo (2 s) y se asumió la presencia de tres componentes. Los valores de las magnitudes $\gamma_k, \omega_k, (k = 2, 3)$, así como los demás valores iniciales, fueron los descritos en la simulación, lo que presupone la búsqueda de una actividad de fondo y dos componentes oscilatorias con picos de frecuencias en las

bandas de alpha y theta. Se tomó la media de los datos como topografías iniciales, con el fin de que el modelo pueda extraer libremente las componentes presentes en los datos y no intervenga un ordenamiento arbitrario dado por el uso de las CP. Como valor inicial para el vector de estado se usó el vector nulo.

La Fig. 6 muestra los cursos temporales y sus respectivas varianzas. En la Figura 7 aparecen, a modo de comparación, las topografías y cursos temporales obtenidos con el uso de nuestro modelo y con el método de las CP. Las primeras se muestran en la Figura 8 como mapas topográficos en una cabeza promedio para ambos métodos. Esta figura fue obtenida con el software de visualización 3DMapper, del Centro de Neurociencias de Cuba. Los voltajes correspondientes a los electrodos desechados y los valores graficados en los espacios entre electrodos, se obtienen por interpolación.

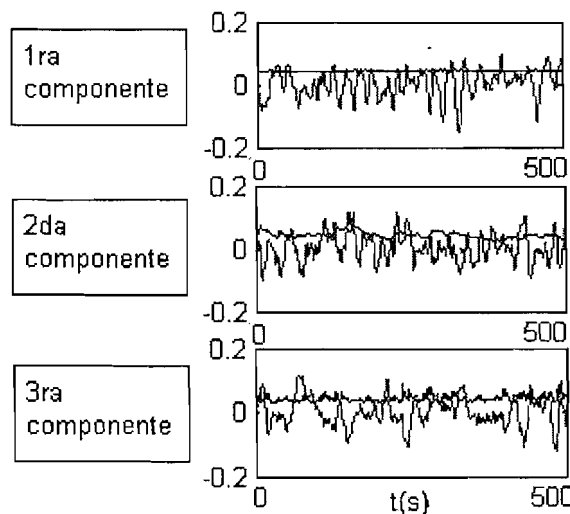


Fig. 6. Factores temporales del EEG (trazo claro) para las componentes estimadas y sus respectivas varianzas (trazo oscuro) para un segmento (2 s) de EEG real registrado con 59 electrodos.

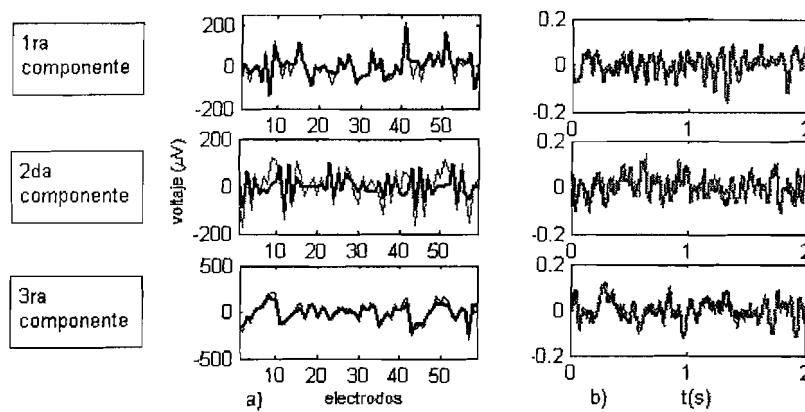


Fig.7. Estimaciones realizadas a partir de datos reales, con el modelo GARCH (trazo claro) y con el método de las CP (trazo oscuro): a) Topografías características, b) Factor temporal

a) b) c)

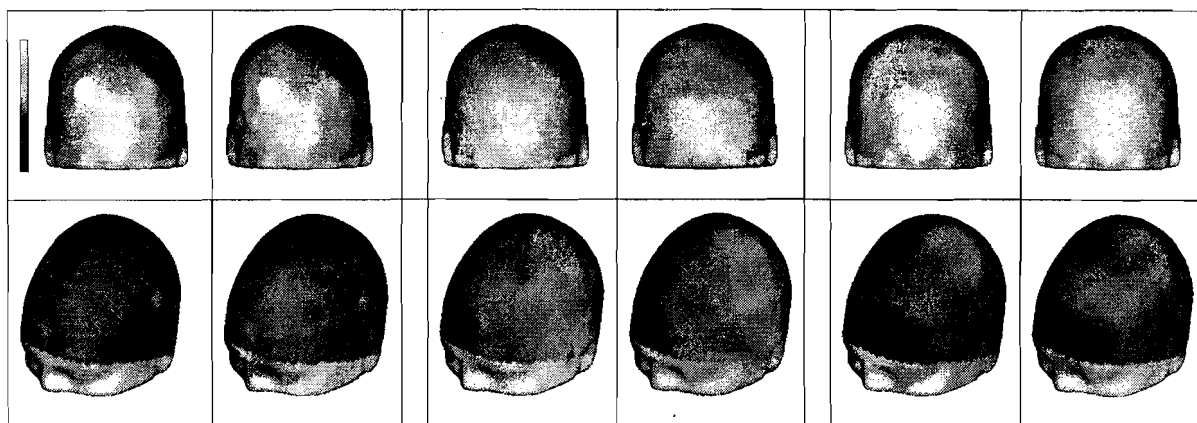


Fig. 8. Mapas topográficos normalizados obtenidos usando el modelo GARCH (a la izquierda) y usando el método de CP (a la izquierda): a) primera componente, b) segunda componente, c) tercera componente.

DISCUSIÓN

Del análisis de los resultados obtenidos en el primer experimento descrito para datos simulados (Figuras. 2 y 3), encontramos que la importancia de las topografías iniciales es relativa. En las tres variantes se encuentran bien estimados los cursos temporales, aunque el factor espacial se estima mejor con el uso de los CP. Sin embargo, en este caso fue necesario reordenar las componentes, ya que el orden de las CP no tiene que coincidir necesariamente con el asumido en nuestro modelo. El uso de la media de los datos no prejuzga el orden de las componentes, es fácil de obtener y permite estimar mucho mejor la varianza del factor temporal (que se utilizaría en la fusión con fMRI) ya que en los primeros casos la innovación del estado se anula desde un inicio y se elimina el término que define al modelo GARCH. Los resultados del segundo experimento parecen indicar que la convergencia del algoritmo no depende del valor inicial x_0 , lo cual era esperado ya que este se actualiza dentro del procedimiento. Tanto las topografías como los factores temporales estimados fueron muy similares en todos los casos, aunque para el tercer caso

la varianza del factor espacial se estimó mejor. En cuanto a los datos reales, hay que reconocer que, aunque los resultados parecen lógicos, no nos ofrecen conclusiones sólidas sobre la utilidad del algoritmo. La principal limitante en este sentido es el costo computacional del algoritmo que no permitió el análisis de segmentos mayores de EEG, de forma que era poco probable encontrar modulaciones de la dinámica del EEG en el segmento estudiado que puedan ser relacionados con los cursos de tiempo de los datos de fMRI posteriormente. En este sentido, parece lógico que las varianzas (Fig. 6a) sean prácticamente constantes para todas las componentes estimadas. Como método de descomposición del EEG, nuestro modelo muestra resultados similares a aquellos obtenidos con el ACP. Es interesante que las tres componentes estimadas tengan una topografía con predominio de la actividad posterior (Fig. 8), siendo la segunda componente la que más coincide con lo reportado en la literatura para este tipo de datos. Para la comparación de estos resultados, fue necesario reordenar y cambiar de signo convenientemente las CP, de modo que se alcanzaran las mayores correlaciones por pares con las componentes extraídas con nuestro algoritmo.

CONCLUSIONES

En este trabajo se planteó un modelo GARCH para la descomposición del EEG en componentes rítmicas y de actividad de fondo, cada una de ellas caracterizada por sus topografías y cursos temporales. A la vez, el modelo nos permite obtener una magnitud relacionada directamente con la modulación del EEG o evolución temporal de su espectro, la cual puede ser relacionada con las series de tiempo de datos de fMRI en busca de métodos que nos den información funcional de alta resolución espacial y temporal. La capacidad del modelo para recuperar la información subyacente fue validada con datos simulados y parcialmente con un pequeño segmento de datos reales, aunque la posibilidad de obtener la evolución temporal correcta del espectro del EEG queda por comprobar cuando el costo computacional del algoritmo permita analizar mayores volúmenes de datos.

Hay que decir que este modelo no es aplicable a datos de EEG correspondientes a potenciales evocados, donde las actividades de interés no tienen un comportamiento rítmico y más bien se tratan de localizar instantáneamente. Además,

existen indeterminaciones intrínsecas del modelo como son el signo y factor de escala de las matrices Λ y G . El primero se escoge según un convenio adoptado y el segundo se resuelve con el pre (post)-procesamiento de los datos (resultados). El número de componentes a extraer debe ser determinado de antemano por el investigador y se debe tener cuidado con las topografías iniciales ya que en el modelo las componentes no son intercambiables. Estos problemas podrían ser abordados y resueltos de una manera más elegante con el uso del enfoque Bayesiano para la estimación de las magnitudes de interés.

En resumen, el empleo de este método de descomposición espacio-temporal del EEG con la aplicación de un modelo GARCH para la dinámica, es una idea muy novedosa que parece poder captar las modulaciones temporales de las actividades fisiológicas presentes en el EEG. Sin embargo, deben estudiarse otros métodos de optimización de los parámetros, de manera que el costo computacional sea menor, facilitando el uso clínico y la investigación. Además, debe analizarse el comportamiento del modelo ante datos simulados con mayor nivel de ruido y mayor complejidad en la interrelación entre las distintas componentes.

APÉNDICE

Para el modelo de Espacio de Estado definido por las ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_t = \mathbf{M}\mathbf{x}_t + \mathbf{e}_t & , \mathbf{e}_t \sim N_{N_e}(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \\ \mathbf{x}_t = \Phi\mathbf{x}_{t-1} + \bar{\mathbf{e}}_t & , \bar{\mathbf{e}}_t \sim N_{2N_k-1}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_t) \end{cases}$$

El valor esperado del vector de estado en el instante t -ésimo dada la información disponible hasta ese mismo

instante, $\mathbf{x}'_t = E(\mathbf{x}_t | \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t)$, se conoce como estimador del Filtro Kalman, y se obtiene minimizando el error cuadrático medio:

$$\mathbf{P}'_t = E[(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}'_t)(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}'_t)^T | \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_t]$$

y puede ser calculado recursivamente usando las siguientes

ecuaciones tomadas de [19]. Para $t = 1 \dots N_t$:

1. $\mathbf{x}'_{t-1} = \Phi\mathbf{x}'_{t-1}$
2. $\mathbf{P}'_{t-1} = \Phi\mathbf{P}'_{t-1}\Phi^T + \mathbf{Q}_t$
3. $\mathbf{K}_t = \mathbf{P}'_{t-1}\mathbf{M}^T (\mathbf{M}\mathbf{P}'_{t-1}\mathbf{M}^T + \mathbf{R})^{-1}$
4. $\mathbf{x}'_t = \mathbf{x}'_{t-1} + \mathbf{K}_t(\mathbf{v}_t - \mathbf{M}\mathbf{x}'_{t-1})$
5. $\mathbf{P}'_t = \mathbf{P}'_{t-1} - \mathbf{K}_t\mathbf{M}\mathbf{P}'_{t-1}$

Aquí se utiliza un valor de \mathbf{x}_0 que se estima por optimización no lineal y un valor razonable fijo para la

matriz \mathbf{P}_0 .¹⁹ Al término $(\mathbf{v}_t - \mathbf{M}\mathbf{x}'_{t-1})$ se le conoce como "innovación" del modelo y el error de predicción del vector de estado se obtuvo como:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{x}'_t - \mathbf{x}'_{t-1} = \mathbf{K}_t(\mathbf{v}_t - \mathbf{M}\mathbf{x}'_{t-1})$$

Por último, en cada iteración el cálculo de la verosimilitud

se llevó a cabo de la forma:²⁰

$$\log L = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{N_t} \log |\mathbf{M}\mathbf{P}'_{t-1}\mathbf{M}^T + \mathbf{R}| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{N_t} (\mathbf{v}_t - \mathbf{M}\mathbf{x}'_{t-1})^T (\mathbf{M}\mathbf{P}'_{t-1}\mathbf{M}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{v}_t - \mathbf{M}\mathbf{x}'_{t-1})$$

La derivación de estas ecuaciones es extensa y no es objetivo nuestro presentarla. Cabe decir que existen

diversas formas de llegar a ellas según sea el punto de partida probabilístico (clásico o Bayesiano), o computacional. Una de ellas puede encontrarse en [21].

BIBLIOGRAFÍA

1. Horwitz B. and Poeppel D. How can EEG/MEG and fMRI/PET data be combined? **Human Brain Mapping**, **17**, 1, 2002.
2. Babiloni F. et al. Linear inverse estimation of cortical sources by using high resolution EEG and fMRI priors. **IJBEM**, **3**, 1, 2001.
3. Baillet S., Leahy R.M., Singh M., Shattuck D.W., Mosher J.C. Supplementary motor area activation preceding voluntary finger movements as evidenced by Magnetoencephalography and fMRI. **IJBEM**, **3**, 1, 2001.
4. Goldman R.I., Stern J.M., Engel Jr J., Cohen M.S. Acquiring simultaneous EEG and functional MRI. **Clin. Neurophysiology**, **111**, 1974, 2000.
5. Goldman R I., Stern J.M., Engel J., Cohen M.S. Simultaneous EEG and fMRI of the Alpha Rhythm. **Neuroreport**, **13**, 18, 2487, 2002.
6. Jackson J.E. A user's guide to principal components. John Wiley & Sons, 1-25, 1991.
7. Jung T.P., Makeig S., Westerfield M., Townsend J., Courchesne E., Sejnowski T. J. Analysis and visualization of single-trial event-related potential. **Human Brain Mapping**, **14**, 166, 2001.
8. Makeig, S. Auditory event-related dynamics of the EEG spectrum and effects of exposure to tones. **Electroencephalography and Clinical Neurophysiology**, **86**, 283, 1993.
9. Bertrand O., Bohórquez J., Pernier J. Time-frequency digital filtering based on an invertible wavelet transform: An application to evoked potential. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, **41**, 77, 1994.
10. Chen S., Donoho D. Atomic decomposition by basis pursuit. **SIAM Review**, **43**, 129, 2001.
11. König T., Marti-Lopez F., Valdés-Sosa P. Topographic time-frequency decomposition of the EEG. **NeuroImage**, **14**, 383, 2001.
12. Miwakeichi F., Martínez-Montes E., Valdés-Sosa P., Nishiyama N., Hiroak, M., Yamaguchi Y. Decomposing EEG data into space-time-frequency components using parallel factor analysis. **NeuroImage**, **22**, 3, 1035, 2004.
13. de Arcel R. Introducción a los modelos autorregresivos con heterocedasticidad condicional (ARCH). Instituto Universitario de Predicción Económica L.R. Klein. Technical Report, 2-8, 1998.
14. Brillinger D.R. Time Series: data analysis and theory. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1981.
15. Pascual R.D., Valdés P.A., Alvarez A. A parametric model for multichannel EEG spectra. **Intern. J. Neurosc.**, **40**, 89, 1988.
16. Durbin J., Koopman S.J. Time series analysis by state space methods. Oxford Statistical Science Series, 24, 2001.
17. Welch G., Bishop G. An introduction to the Kalman Filter, UNC-Chapel Hill, Technical Report, 95-041, 2003.
18. Lagarias J.C., Reeds J.A., Wright M.H., Wright P.E. Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. **SIAM Journal of Optimization**, **9**, 1, 112, 1998.
19. Shumway R.H., Stoffer D.S. An approach to time series smoothing and forecasting using the EM algorithm. **Journal of Time Series Analysis**, **3**, 4, 1982.
20. Gupta N.K., Mehra R.K. Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitive function calculations. **IEEE Trans. Aut. Cont. AC**, **19**, 774, 1974.
21. Shunway R.H., Stoffer D.S. Time series smoothing and forecasting using the EM algorithm. Technical Report No. 27, Division of Statistics, University of California, Davis, 1981.